Федеральное агентство по образованию
Восточно-Сибирский государственный технологический
университет

# Методическое пособие

по выполнению контрольных работ
по высшей математике для
студентов заочного отделения
технологических специальностей

Составители:
Гармаев В.Д.
Гармаева С.С.
Баирова Н.К.
Дарибазарон С.Б.

Улан-Удэ
2005

Методическое пособие предназначено для обучения студентов–заочников практическим умениям по математике. По разделам предмета даются краткие теоретические сведения, ориентированные для решения задач. Предложены образцы решения типичных задач, входящих в контрольные работы заочников.

Ключевые слова: величина, функция, предел, производная, интеграл, уравнение, ряд, событие, вероятность

Подписано в печать 6.09.2005г. Формат 60x84 1/16
Усл. п.л. 4,88, уч.изд.л. 4,5. Тираж 100 экз. заказ № 141

Издательство ВСГТУ. г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40 в

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т.1,2-М.: Наука.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.:Наука,.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления.-М.:Наука,
4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.:Наука.
5. Гмурман В.И. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа.

## Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

**Задача $1^0$.** Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3,1,3)$, $A_2(-3,4,0)$, $A_3(3,3,4)$, $A_4(2,2,-2)$. Найти:

1. длину ребра $A_1A_2$;
2. угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$;
3. площадь грани $A_1A_2A_3$;
4. объем пирамиды;
5. уравнение прямой $A_1A_2$;
6. уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
7. уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$.

Решение:

Начнем решение задачи с выполнения чертежа. Построим точки $A_1$, $A_2$ ,$A_3$, $A_4$ в прямоугольной системе координат и, соединив их отрезками прямых, получим пирамиду $A_1A_2A_3A_4$.

Для удобства записи обозначим векторы $A_1A_2=\vec{a}$, $A_1A_4=\vec{b}$ и $A_1A_3=\vec{c}$.

Координаты соответствующих векторов обозначим $\bar{a}(a_x,a_y,a_z),\bar{b}(b_x,b_y,b_z),\bar{c}(c_x,c_y,c_z).$

1. Если $M_1(x_1,y_1,z_1)$ - начало вектора, а $M_2(x_2,y_2,z_2)$ его конец, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны разности соответствующих координат конца $M_2$ и начала $M_1$, т.е.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \qquad (1)$$

а↔модуль↔вектора

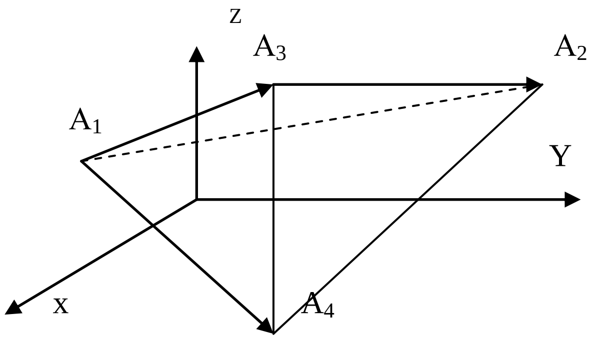
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

т.о. длину ребра $A_1A_2$ находим как модуль вектора $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-3-3)^2+(4-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{36+9+9}=$$

$$=\sqrt{54}\approx 7,35$$

Ответ: Длина ребра $A_1A_2$ равна 7,35 мин.ед.




2. Угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$ обозначим через φ и вычислим cosφ по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \qquad (2)$$

Координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находим по формуле (1): $\bar{a}(-6,3,-3),\bar{b}(-1,1,-5)$. Полученные координаты подставим в формулу (2):

$$\cos\varphi=\frac{-6(-1)+3\cdot 1-3(-5)}{\sqrt{36+9+9}\sqrt{1+1+25}}=$$

$$=\frac{24}{\sqrt{54}\sqrt{27}}=\frac{24}{27\sqrt{2}}\approx 0,6304$$

Ответ: Угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$ равен arccos(0,6304)

3. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $A_1A_2$ и $A_1A_3$:

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_2A_3}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|\left[\bar{a},\vec{c}\right]\right|.$$

Координаты вектора $\bar{a}$ известны, найдем координаты вектора $\bar{c}(c_x,c_y,c_z)$. Т.о. $\bar{c}=(3-3,3-1,4-3)=(0,2,1)$.

Найдем векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$

$$\vec{a},\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2}\left| \vec{a},\vec{c} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 6^2 + 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{81 + 36 + 144} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{261}$$

Ответ: Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна 8.1 кв.ед.

4. Зная, что смешанное произведение векторов $(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = \vec{a}\vec{c}\vec{b}$ есть число, абсолютная величина которого выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$, а пирамида $A_1A_2A_3A_4$ составляет 1/6 часть этого параллелепипеда, можем написать $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{c}\vec{b}\right|$.

Но смешанное произведение трех векторов $\vec{a}(-6,3,-3), \vec{c}(0,2,1), \vec{b}(-1,1,-5)$, заданных своими координатами, равно определителю третьего порядка, составленному из этих координат. Таким образом,

$$\vec{a},\vec{c},\vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6(9) - 1(9) =$$

$$= -54 - 9 = -63$$

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|-63\right| = \frac{63}{6} = 10,5$$

Ответ: Объем пирамиды равен 10,5 куб.ед.

5. Уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

Подставляем координаты точек $A_1(3,1,3)$ и $A_2(-3,4,0)$ в формулу (4):

$$\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-3}{0-3}, \quad \frac{x-3}{-6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-3}.$$

Ответ: $\frac{x-3}{-6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-3}$.- уравнение прямой $A_1A_2$.

6. Уравнение грани $A_1A_2A_3$ найдем как уравнение плоскости, проходящей через три точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Подставив координаты точек $A_1$, $A_2$ и $A_3$ в формулу (5), получим уравнение грани $A_1A_2A_3$ :

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-3 \\ -3-3 & 4-1 & 0-3 \\ 3-3 & 3-1 & 4-3 \end{vmatrix} = 0, \text{перепишем и раскроем}$$

определитель:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-3 \\ -6 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x+3)9-(y-1)(-6)+(z-3)(-12) =$$

$$=9x+27+6y-6-12z+36=9x+6y-12z+57=0$$

Сокращаем на 3: 3x+2y-4z+19=0.

Ответ: Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $\leftrightarrow$ 3x+2y-4z+19=0.

7. Найдем уравнение высоты, опущенной из вершины $A_4$. Для этого примем за направляющий вектор прямой, проходящей через точку $A_4(2,2,-2)$ перпендикулярно плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ нормальный вектор этой плоскости. Вспомним, что если плоскость задана уравнениями вида ax+by+cz+d=0, то коэффициенты а,в,с можно рассматривать как координаты нормального вектора плоскости, т.е. вектора, перпендикулярного к плоскости.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: 3x+2y-4z+19=0. Нормальный вектор плоскости $\vec{N}(3,2,-4)$. Напишем искомое уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(x_4,y_4,z_4)$, в направлении вектора $\vec{N}(m,n,p)$.

$$\frac{x-x_4}{m}=\frac{y-y_4}{n}=\frac{z-z_4}{p}. \qquad (6)$$

Подставив координаты в формулу (6), получим $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

Ответ: Уравнение высоты, опущенной из точки $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-4}$

**Задача 2.** Исследовать систему линейных уравнений и решить её методом Гаусса в случае её совместности.

Среди многочисленных методов решения систем линейных уравнений одним из наиболее удобных является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса. Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1,x_2,\ldots,x_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Числа $a_{ij}$ называются коэффициентами i-го уравнения при j-ом неизвестном, числа $b_i$- свободными членами.

Решением системы (7) называется совокупность n чисел $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_n$ при подстановке которых вместо неизвестных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ каждое уравнение системы обращается в числовое равенство. Совместными называются системы, имеющие решение; несовместимыми- системы, не имеющие решений.

Метод Гаусса, применяемый для решения системы (7), состоит в следующем.

Пусть $a_1 \neq 0$ (это всегда можно сделать за счет изменения нумерации уравнений). Умножая первое уравнение системы на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавляя ко второму, получаем уравнение, в котором коэффициент при $x_1$ обращается в нуль. Умножая первое уравнение системы на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и прибавляя к третьему, получаем уравнение, также не содержащее члена с $x_1$. Аналогичным путем преобразуем все остальные уравнения, в результате чего придем к системе, эквивалентной исходной системе уравнений:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{array}\right\} \quad (8),$$

где $a'_{ij}(i = 2,3,\ldots m;\ j = 2,3,\ldots n)$ – некоторые новые коэффициенты.

Предполагая, что $a'_{22} \neq 0$ и оставляя неизменными первые два уравнения системы (8), преобразуем её так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при $x_2$ обратился в нуль. Продолжая этот процесс, систему (7) можно привести к виду:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{pp}x_p + \ldots + a'_{pn}x_n = b'_p \end{array}\right\}, \text{p} \leq \text{m} \qquad (9)$$

Если p=n, т.е. последнее уравнение имеет вид $a'_{nn}x_n = b'_n$, то система в этом случае имеет единственное решение.

Если p<n, то решение системы находится так: переменным $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots x_n$ можно придать произвольные значения $k_1, k_2, \ldots k_n; k_i \in R$. Значения $x_p, x_{p-1}, \ldots x_1$ вычисляются из уравнений системы (9).

При решении систем методом Гаусса могут встретиться:

1) уравнения вида 0=0, они вычеркиваются из системы;
2) уравнения вида 0=$в$, где $в \neq 0$. Это означает, что система вообще не имеет решений.

Рассмотрим пример:

а) решить систему методом Гаусса:

$$\left.\begin{array}{r} 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 7 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

При решении систем линейных уравнений методом Гаусса следует выписать расширенную матрицу системы: матрицу из коэффициентов системы с присоединением к ней столбца из свободных членов. Столбец из свободных членов для удобства отделяют вертикальной чертой. Все преобразования выполняются над строками этой расширенной матрицы, в результате матрица приводится к виду ступенчатому, соответствующему системе (9).

Так, имеем

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{19}{7} & \frac{60}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix}.$$

Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения первой строки на $\left(\frac{5}{7}\right), \left(-\frac{1}{7}\right)$ и прибавления соответственно ко второй и третьей строке матрицы.

Далее прибавим к третьей строке вторую, умноженную на $\frac{19}{7} \cdot \frac{7}{4} = \frac{19}{4}$, получим

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{19}{7} & \frac{60}{7} & \frac{45}{7} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{13}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{21}{2} \end{pmatrix}.$$

Этой матрице соответствует равносильная системе (10) система:

$$\left.\begin{array}{r} 7x_1-2x_2+3x_3=4 \\ \frac{4}{7}x_2-\frac{13}{7}x_3=\frac{6}{7} \\ -\frac{1}{4}x_3=\frac{21}{2} \end{array}\right\}$$

Эта система имеет треугольный вид. Значит она определена. Найдем её единственное решение. Из последнего уравнения находим: $x_3=\frac{21}{2}(-4)=-42.$

Подставляем значение $x_1$ во второе уравнение и находим $x_2$=-135. Наконец, подставляем найденные значения $x_3$ и $x_2$ в первое уравнение и находим $x_1$=20. Итак, исходная система совместна и имеет единственное решение: $x_1$=20, $x_2$=-135, $x_3$=-42.

Рассмотрим еще один пример:

б) Решить систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1-2x_2+3x_3=25 \\ 2x_1+4x_2-x_3=-6 \\ 4x_1-8x_2+7x_3=56 \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Решение: Этой системе соответствует расширенная матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 25 \\ 2 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -8 & 7 & 56 \end{pmatrix}$$

Вычтем из второй строки первую, умноженную на $\frac{2}{3}$, и из третьей строки первую, умноженную на $\frac{4}{3}$. Получим:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 25 \\ 0 & \frac{16}{3} & -3 & -\frac{68}{3} \\ 0 & -\frac{16}{3} & 3 & \frac{68}{3} \end{pmatrix}$$

Если теперь вторую строку прибавить к третьей, то вся третья строка будет сплошь состоять из нулей, что соответствует уравнению вида 0=0. Значит, система (11) равносильна системе:

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1-2x_2+3x_3=25 \\ \frac{16}{3}x_2-3x_3=-\frac{68}{3} \end{array}\right\}$$

Объявим $x_3$ свободным неизвестным и перенесем его в правую часть. $3x_1-2x_2=25-3x_3;\ \frac{16}{3}x_2=-\frac{68}{3}+3x_3.$ Из последнего уравнения находим, что $x_2=-\frac{17}{4}+\frac{9}{16}x_3$. Подставляем это значение $x_2$ в первое уравнение: $3x_1-2\left(-\frac{17}{4}+\frac{9}{16}x_3\right)=25-3x_3$, или

$3x_1+\frac{17}{2}-\frac{9}{8}x_3=25-3x_3$, или $3x_1=\frac{33}{2}-\frac{15}{8}x_3$,

т.е. $x_1=\frac{11}{2}-\frac{5}{8}x_3$. Итак, система имеет общее решение:

$$\left.\begin{array}{r} x_1=\frac{11}{2}-\frac{5}{8}x_3 \\ x_2=-\frac{17}{4}+\frac{9}{16}x_3 \end{array}\right\}$$, где $x_3$ – свободное неизвестное, а $x_1$ и $x_2$ – базисные неизвестные, которые выражены через свободные неизвестные.

Используя преобразования матрицы по методу Гаусса, можно дать понятие ранга матрицы. Рангом матрицы называется число ненулевых строк, которое получается после её приведения к «ступенчатому виду» по методу Гаусса.

<u>*Теорема Кронекера-Капелли*</u>. Система (7) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

**Задача 3.** Пусть заданы векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Если существуют постоянные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что имеет место равенство $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ..\alpha_n\vec{a}_n = 0,$ (12)

то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно-зависимыми, т.е. один из них может быть выражен как линейная комбинация остальных. Если же равенство (12) справедливо только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно-независимыми.

Справедлива следующая теорема: Произвольные четыре вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ в пространстве, линейно зависимы, т.е. найдутся такие числа m,n,p, что $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

*Рассмотрим пример*: Разложить вектор $\vec{d} = \{3,7,-7\}$ по линейно независимым векторам $\vec{a} = \{2,1,0\}, \vec{b} = \{1,-1,2\}, \vec{c} = \{2,2,-1\}$.

Решение: Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – это значит представить вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, где m,n,p – некоторые числа. Подставляя в данное равенство координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ,получим

$\{3,7,-7\} = m\{2,1,0\} + n\{1,-1,2\} + p\{2,2,-1\}$, т.е.

$$\begin{cases} 3 = 2m + n + 2p \\ 7 = m - n + 2p \\ 7 = 0m + 2n - p \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $m = 2, n = -3, p = 1$. Следовательно, $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

**Задача 4.** Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$?

Коллинеарными называются векторы, расположенные на одной прямой или параллельных прямых.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов заключается в равенстве нулю их векторного произведения.

$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Отсюда следует, что $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

*Пример*: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1, \vec{c}_2$, если $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{c}_2 = -\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} = \{1,0,2\}, \vec{b} = \{3,1,4\}$.

Решение: Поскольку векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координаты которых известны, то мы можем записать координаты векторов $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ как линейные комбинации соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Примем следующее обозначение: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{c}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Тогда

$$\vec{c}_1 = \{x_1, y_1, z_1\} = \{2a_x + 3b_x, 2a_y + 3b_y, 2a_z + 3b_z\} =$$
$$= \{2\cdot1 + 3\cdot3, 2\cdot0, +3\cdot1, 2\cdot2 + 3\cdot4\} = \{11,3,16\}$$
$$\vec{c}_2 = (x_2, y_2, z_2) = \{-a_x + b_x, -a_y + b_y, -a_z + b_z\} =$$
$$= \{-1 + 3, 0 + 1, -2 + 4\} = \{2,1,2\}$$

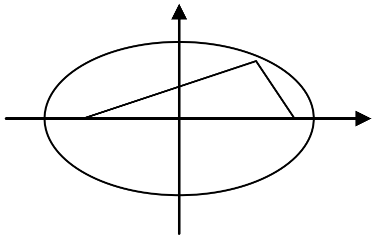
Подставим координаты векторов $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ в формулу (3) для вычисления векторного произведения $[\vec{c}_1, \vec{c}_2]$

$$[\vec{c}_1,\vec{c}_2]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 11 & 3 & 16\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-10\bar{i}+10\bar{j}+5\bar{k};$$

Векторное произведение $[\vec{c}_1,\vec{c}_2]\neq\vec{0}$, следовательно, векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ не коллинеарны.

**Задача 5⁰**. Компланарны ли векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Решение: Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ или, в координатной форме,



$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0.$$

Пример: Проверить, компланарны ли векторы

. М $\vec{a}=(1{,}0{,}-1),\vec{b}=(2{,}4{,}3),\vec{c}=(1{,}-5{,}8)$.

Решение: Вычислим определитель третьего порядка, составленный из координат векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Разложим его по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -5 & 8\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 8\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot 47-0+14=61\neq 0;$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны.

**Кривые второго порядка**

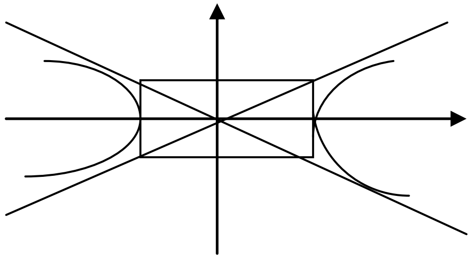
Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ определяет окружность радиуса R с центром в точке с координатами (а;в). Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности принимает вид $x^2+y^2=R^2$.

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух постоянных точек-фокусов эллипса есть величина постоянная, равная 2а. Расстояние между фокусами $|F_1F_2|=2c$ ; простейшее уравнение эллипса мы получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс, и поместив начало координат в середине между ними. Тогда уравнение эллипса примет вид:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$. Точки пересечения эллипса с его осями ($A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$) называются вершинами эллипса. Параметры а и в, входящие в уравнение эллипса равны его полуосям.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния 2с:2а, т.е. $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$; очевидно, ε<1. Расстояния точки до фокусов называются ее фокальными радиусами – векторами ($r_1$ и $r_2$). Для любой точки М(x;y) эллипса имеем: $r_1 = a - \varepsilon x, r_2 = a + \varepsilon x$ и по самому определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$.

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная 2a. Фокусы гиперболы обозначаются $F_1$ и $F_2$, расстояния между ними 2c. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид:



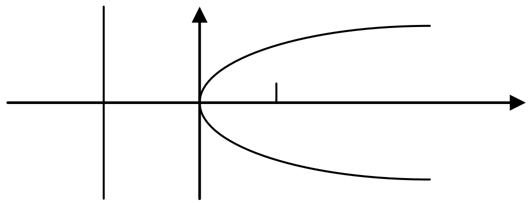
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Прямоугольник со сторонами 2a и 2b расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах называется основным прямоугольником гиперболы. Диагонали основного прямоугольника, неограниченно продолженные, являются асимптотами гиперболы, их уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$; уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболу, симметричную относительно координатных осей с фокусами на оси ординат.

Две гиперболы, которые определяются уравнениями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в одной и той же системе координат, называются сопряженными. Гипербола с равными полуосями a=b называется равносторонней, ее каноническое уравнение имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$ или $-x^2 + y^2 = a^2$. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы, ε>1.

Если т.М(x,y) произвольная точка гиперболы, то отрезки $F_1M$ и $F_2M$ называются фокальными радиусами т.М. Фокальные радиусы точек правой ветви гиперболы вычисляются по формулам: $r_1 = \varepsilon x + a, r_2 = \varepsilon x - a;$ фокальные радиусы точек левой ветви – по формулам: $r_1 = -\varepsilon x - a, r_2 = -\varepsilon x + a$.

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой. Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы – буквой p.

Число p называется параметром параболы. Введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус параболы, а ось ординат параллельно директрисе. Тогда уравнение параболы $y^2 = 2\rho x$.



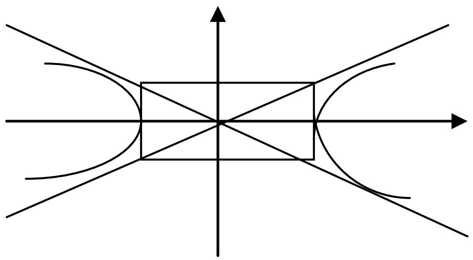
Уравнение $x^2$=2py определяет параболу, симметричную относительно оси ординат.

*Рассмотрим задачи.*

*Задача 1.*

Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось a=6, а эксцентриситет ε=0,5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, зная, что $\varepsilon=\frac{c}{a}$; c=εa=0,5·6=3 найдем полуось $b=\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$. Получим: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{45}=1$.

*Задача 2.* Построить гиперболу $x^2$-4$y^2$=16 и её асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет.



Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду, разделив обе части на 16: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$, отсюда $a^2$=16, a=4, $в^2$=4, в=2;

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$;

$F_1(-2\sqrt{5};0), F_2(2\sqrt{5};0). \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

Сделаем чертеж. Для этого рисуем основной прямоугольник и его диагонали – они являются асимптотами гиперболы.

*Задача 3.* Привести к каноническому виду $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$ и построить график.

Сгруппируем члены, содержащие x и члены содержащие y, выделим полный квадрат суммы или разности.

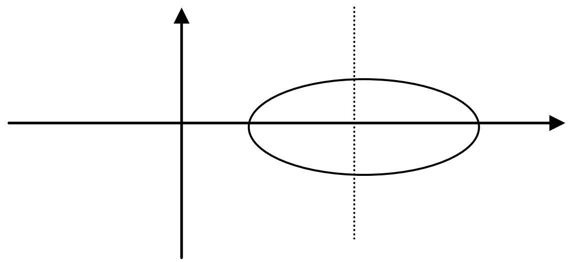
$(2x^2-12x)+(5y^2+10y)+13=0;$

$2(x^2-2\cdot 3\cdot x+9-9)+5(y^2+2y+1-1)+13=0;$

$2(x-3)^2-18+5(y+1)^2-5+13=0;\ 2(x-3)^2+5(y+1)^2=10;$

$\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{2}=1.$

Получим каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{2}$, оси координат перемещены по оси x на 3 единицы вправо, по оси y на –1. Строим график.



## Предел функции.

**Определение:** Число в называется пределом функции y=f(x) при x→a, если существует такое число δ, что для всех x, лежащих между a-δ<x<δ+a выполняемо неравенство |f(x)-b|<ε. для любого $\varepsilon>0$

Будем писать $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. Существуют следующие теоремы предельного перехода:

*Теорема 1*: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b+c$.

*Теорема 2*: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b\cdot c$.

*Теорема 3*: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=c$ ( причем c≠0), то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}$.

*Теорема 4*: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ и если задана третья функция ψ(x), удовлетворяющая для всех x, лежащих в некоторой окрестности точки a, условию $f(x)\le\varphi(x)\le\psi(x)$ , то функция ψ(x) при x→a также имеет предел, и этот предел равен в.

Рассмотрим несколько примеров:

*Пример 1*: Найти предел функции $y=x^3+3x^2-4$ при ↔ x→2 $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3x^2-4)=\lim\limits_{x\to 2}x^3+\lim\limits_{x\to 2}3x^2+\lim\limits_{x\to 2}(-4)$. Для разыскания пределов функций $x^3$ и $3x^2$ применим теорему о пределе произведения $\lim\limits_{x\to 2}x^3=\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x=2\cdot 2\cdot 2=8$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to 2}3x^2=12$. Итак. функция $x^3+3x^2-4$ имеет предел при x→2;

$\lim\limits_{x\to 2}(x^3+3x^2-4)=8+12-4=16$.

*Пример 2*: Найти предел функции $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ при x→0

Непосредственное применение теоремы о пределе частного здесь недопустимо, так как предел знаменателя равен нулю. Поэтому нахождение предела этой дроби сводится к раскрытию неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$. Для её раскрытия преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители: $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$. Сократим дробь на x-3, т.е.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6}$$

Таким же приемом можно найти предел любой дроби, в числителе и знаменателе которых стоят многочлены, стремящиеся к нулю при x→a.

*Пример 3*: Рассмотрим функцию $y=\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ и найдем её предел при x→0.

Здесь мы также имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Для её раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, после чего мы можем сократить на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3})(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3-3}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

Совершенно аналогично рассматривается предел функции при x→∞.

**Определение.** Число в называется пределом функции y=f(x) при x→∞, если для любого ε>0 можно найти такое число N, что для всех x, превосходящих N, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Отыскание предела функции непосредственно с помощью определения предела представляет обычно значительные трудности. Задача отыскания предела может быть значительно облегчена, если помнить предварительно рассмотренные теоремы предельного перехода при x→a, которые остаются в силе и при x→∞.

*Пример 4:* Найти предел функции $y=\dfrac{2x+3}{4x+5}$ при x→∞.

Рассматриваемая функция является частным от деления 2x+3 на 4x+5. Однако для разыскания предела частного нельзя сразу применять теорему 3, так как ни числитель, ни знаменатель сами не имеют предела (обе эти функции неограниченно возрастают при x→∞). Для того чтобы найти предел данной дроби, предварительно преобразуйте её, разделив числитель и знаменатель на x, дробь от этого не изменит своей величины, а, следовательно, и своего предела; однако, после преобразования предел будет легче найти.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{4+\frac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ .$$

В данном случае применить теорему о пределе частного мы имеем право, так как пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя отличен от нуля.

*Пример 5:* Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

Для того чтобы можно было применить теорему о пределе частного, разделим числитель и знаменатель на $x^2$. В этих примерах и числитель, и знаменатель стремятся к ∞, поэтому говорят, что имеем неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия делят числитель и знаменатель дроби на неизвестное в наибольшей степени.

*Пример 6:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{3x^2+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{5}{3};$$

*Пример 7:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x-1}{7x^3-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}}=\frac{2}{0}=\infty.$$

*Пример 8:* Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+5}\right)$. Здесь имеем неопределенность типа «∞-∞». Умножая и деля на сопряженное выражение, получили

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x-5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+5}}=\frac{-4}{\infty}=0$$

*Пример 9:*

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+1}\ ="\infty-\infty"=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-x^2+1}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}$$

Мы свели неопределенность типа «∞-∞» к «$\frac{\infty}{\infty}$». Деля числитель и знаменатель дроби на x получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{5}{2}.$$

<u>Первый замечательный предел</u>

Во многих задачах анализа приходится встречаться с пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ при x→0. Эта функция определена для всех x (кроме x=0) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$; как следствие из этой формулы имеем: $\lim\limits_{x\to0}\frac{k\sin xk}{xk}=k,\ \lim\limits_{x\to0}\frac{\sin kx}{kx}=1.$

*Пример 10:*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{8}=\lim_{x\to0}\frac{3}{8}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{8}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{8},$$

так как $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$

*Пример 11:* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=-\frac{9}{2}.$

В самом деле, так как

$$\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\frac{-2\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}=-\frac{9}{2}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2;$$

то $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}-\frac{9}{2}\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2=-\frac{9}{2}.$

*Пример 12:*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{tg3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin x\cdot\cos 3x}{x\cdot\sin 3x}=\frac{1}{3}.$$

**Второй замечательный предел**

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;$ Следствие: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x=e^n$

или $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e;$ Следствие: $\lim\limits_{x\to0}(1+nx)^{1/x}=e^n$

Доказано, что число e является иррациональным числом. Приближенное значение числа e с точностью до $10^{-5}$ равно e=2,71828.

Число e играет важную роль в математике, и нам придется с ним неоднократно встречаться. В частности, мы будем использовать логарифмы с основанием e, так называемые натуральные, или «Неперовы» логарифмы – по имени открывшего их шотландского математика Непера (1550-1617г.г.). По имени его часто и число e называют неперовым числом.

*Пример 13*: $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{x/(x-1)}$

Осуществим подстановку x-1=z, тогда z→0.

$$\lim_{x\to 1} 3x-3+1 \ ^{x/(x-1)} =$$

$$=\lim_{z\to 0} 1+3z \ ^{(z+1)/2} = \lim_{z\to 0} 1+3z \ ^{1+1/z} =$$

$$=\lim_{z\to 0} 1+3z \ (1+3z)^{1/z} = 1\cdot e^{3} = e^{3}$$

*Пример 14:*

$$\lim_{x\to\infty} 2x+1 \ \ln\frac{x+2}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x+1} =$$

применили теоремы о логарифме произведения и степени и данный предел сведем ко второму замечательному пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+3-1}{x+3}\right)^{2x+1} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{2(x+3)-5} =$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{2(x+3)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)^{-5} =$$

$$=\ln \ e^{-2}\cdot 1 \ = -2.$$

**Непрерывность функции**

Наше представление о непрерывной функции обычно связывается с изображением этой функции в виде графика, причем функцию мы считаем непрерывной, если её график представляет собой сплошную, непрерывную линию. Однако такое представление о непрерывной функции дает только наглядный смысл понятия непрерывности. Когда мы говорим, что функция непрерывна, то под этим подразумеваем, что близким значениям независимого переменного соответствуют близкие между собой значения функции: при неограниченном сближении значений независимого переменного значения функции также могут быть сделаны сколь угодно близкими друг другу.

Рассмотрим какую-либо точку $x_0$ на оси абсцисс и предположим, что найдется такой интервал ($x_0$; $x_0$+h) во всех точках которого функция y=f(x) определена. Если она определена также в точке $x_0$ и её предел справа при $x\to x_0+0$ существует и равен значению функции в точке $x_0$, то говорят, что эта функция непрерывна справа в точке $x_0$, т.е. имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_\circ+0} f(x) = f(x_0)$. Аналогично, дается определение непрерывности функции слева, т.е. $\lim\limits_{x\to x_\circ-0} f(x) = f(x_0)$. Если функция определена в некоторой окрестности точки x и непрерывна в этой точке как справа, так и слева, то говорят, что функция двусторонне непрерывна в точке $x_0$. В дальнейшем мы будем называть такую функцию просто непрерывной в точке $x_0$.

Ввиду важности этого понятия сформулируем приведенное здесь определение непрерывной функции в более развернутом виде. Функция y=f(x) называется непрерывной в точке $x_0$, если:

1) функция определена в некотором интервале, содержащем точку $x_0$;
2) функция имеет предел справа, предел слева и они равны между собой:
$$\lim_{x\to x_\circ-0} f(x) = \lim_{x\to x_\circ+0} f(x);$$
3) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x) = f(x_0)$

Если в точке $x_0$ функция f(x) непрерывна, то эта точка называется точкой непрерывности функции f(x). Если не выполняется хотя бы одно из трех условий, данных в определении непрерывности функции, то говорят, что функция терпит разрыв.

*Пример 15:* $f(x) = 3x + 5x^2$

Непрерывна в любой точке. Действительно, в любой точке $x_0$ эта функция определена $f(x_0) = 3x_0 + 5x_0^2$; предел этой функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функций в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = \lim\limits_{x \to x_\circ} (3x + 5x^2) = 3x_\circ + 5x_\circ^2 = f(x_\circ)$. Итак, выполнены все условия непрерывности функции в точке $x_0$.

*Пример 16:* Функция задана двумя равенствами:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5, & \text{для} \quad x > 0 \\ x + 1, & \text{для} \quad x \le 0 \end{cases}$$

Разрывна в точке $x_0=0$ так как она не имеет предела при $x \to 0$. Действительно, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 5;\ \lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1$

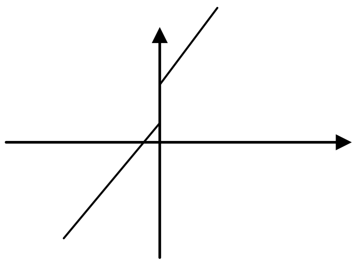


Рис.1

*Пример 17:* Функции $f(x) = \dfrac{1}{x},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ разрывны в точке $x=0$, так как они не определены в этой точке, хотя определены в ее окрестности.

*Пример 18:* Функция, определенная двумя равенствами $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{для} \quad x \ne 0 \\ 1, & \text{для} \quad x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$, действительно, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Теорема: Если функция $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то функция $\varphi(x) + \psi(x)$ также непрерывна.

Типы разрывов функции

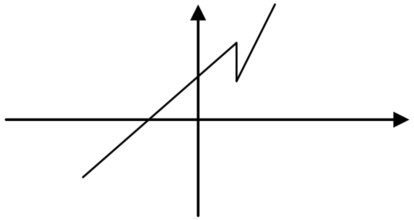
*Определение*: Точка разрыва $x_0$ функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ существуют.

*Определение:* Точка разрыва $x_0$ функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ не существует.

Среди точек разрыва первого рода важно выделить в качестве частного случая такие точки, для которых оба односторонних предела не только существуют, но и равны между собой. В таких точках разрыв может произойти за счет того, что функция не определена в точке $x_0$. Точки разрыва, в которых оба односторонних предела существуют и равны между собой, называются точками устранимого разрыва. Термин «точка устранимого разрыва» объясняется тем, что мы можем сделать функцию в этой же точке непрерывной, изменив значение функции только в точке $x_0$ (или доопределив функцию в этой точке), полагая $f(x_0)$ равным общему значению правого и левого пределов при $x \to x_0$.

В отличие от этой точки разрывы первого рода, для которых предел справа отличен от предела слева, а также все точки разрыва второго рода называются точками неустранимого разрыва. Рассмотрим примеры.

*Пример 19:*

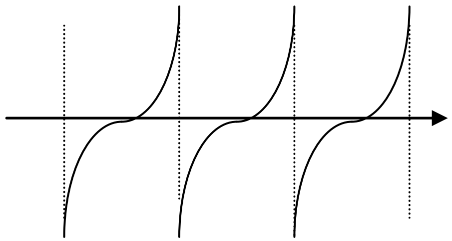


$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{при } x<2 \\ x^2-1 & \text{при } x\ge 2\end{cases}$$

Эта функция в точке $x_0=2$ имеет разрыв первого рода; здесь пределы справа и слева существуют, причем

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=4,\ \lim_{x\to 2+0} f(x)=3$$

*Пример 20:*
f(x)=tgx.



f(x)=tgx в точке $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ имеет разрыв второго рода, в этой точке функция не имеет ни предела справа, ни предела слева.

*Пример 21:*

Функция $f(x)=2^{1/x}$ имеет разрыв II рода в точке $x_0=0$. Здесь существует предел слева при $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{1/x}=2^{-\infty}=0$, но не существует предел справа

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\infty$. Действительно, при $x\to 0$ справа $\dfrac{1}{x}$ стремится к $+\infty$ (так как справа от нуля x положителен); но если основание степени постоянно и больше единицы, а показатель стремится к $+\infty$, то степень стремится к $\infty$. Таким же образом проверяется, что $2^{1/x}$ стремится к нулю, когда x стремится к нулю слева (в этом случае $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ ).

*Пример 22:*

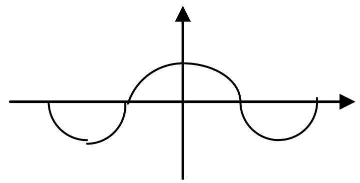
Функция $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ имеет разрыв в точке $x_0=0$,

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+2^{1/x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

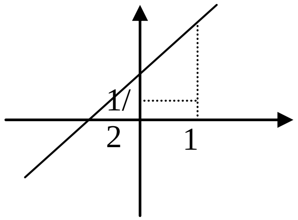
Функция имеет в этой точке разрыв первого рода. Сама функция в точке $x_0=0$ не определена.

*Пример 23:*



Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x_0=0$ имеет устранимый разрыв, пределы этой функции справа и слева при $x\to 0$ существуют и равны 1, однако функция не определена при $x_0=0$ (см. рис.). Разрыв этот можно устранить, доопределив функцию в точке $x_0=0$, полагая f(0)=1.

*Пример 24:*




$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{для}\quad x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, & \text{для}\quad x=1\end{cases}.$$ Эта функция имеет устранимый разрыв в точке $x_0$=1 (см. рис.). Устранить разрыв можно, изменив значение функции в этой точке и положив f(1)=2.

## Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

1. Основные понятия.

*Определение 1*. Производной функции по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'_x=\frac{dy}{dx}.$$

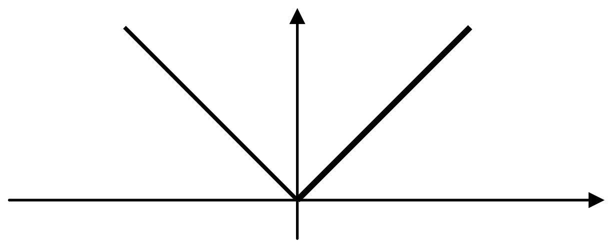
1) Скорость есть производная от пути по времени: $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=S'_t$.
2) Ускорение есть производная от скорости по времени: $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=v'_t$.
3) Теплоемкость есть производная от количества тепла по температуре: $C=\lim\limits_{\Delta t^0\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t^0}=Q'_{t^0}$.
4) В геометрии $y'_x=tg\alpha$ - угловой коэффициент касательной к графику этой функции.

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

### Зависимость между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Непрерывность функции является необходимым условием, но недостаточным условием дифференцируемости функции.

Если функция y=f(x) имеет в точке x определенную производную, то она непрерывна в этой точке, обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной. Например, функция y=|x| в точке x=0 непрерывна. В то же время в точке $x_0$ определенной касательной не существует, функция не дифференцируема.



Основные правила дифференцирования

I. $C'=0$

II. $(u+v)'=u'+v'$

III. $(uv)'=u'v+uv'$

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

V. y=y(x) является неявной функцией от x, если задана уравнением F(x,y)=0. Обе части равенства дифференцируем по x, помня, что y есть функция от x, затем полученное равенство разрешить относительно $y'_x$.

VI. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ - параметрическое задание функции, где

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

VII. $y = f(u)$, где u= φ(x), т.е. $y = f[\varphi(x)]$- сложная функция от x, её производная $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

**Таблица производных сложной функции**

I. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

II. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a \neq 1, a > 0$

III. $(e^u)' = e^u \cdot u'$

IV. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

V. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

VI. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

VII. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

VIII. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

IX. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

X. $(\arccos u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

XI. $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$

XII. $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$

**Решение примеров**

*Пример 1*: $y = (x^2+3)^5, y'_x = ?$

Пусть $x^2 + 3 = u$, тогда $y = u^5$, пользуясь формулой 1 из таблицы, имеем

$$y'_x = 5u^4 \cdot u' = 5(x^2+3)^4(x^2+3)' = 10x(x^2+3)^4$$

Ответ: $y'_x = 10x(x^2+3)^4$

*Пример 2*: $y = \sin 4x, y'_x = ?$ Имея в виду 4x=u, применяя формулу V, получим

$$y'_x = \cos 4x(4x)' = 4\cos 4x.$$

Ответ: $y'_x = 4\cos 4x.$

*Пример 3*: $y = \ln\cos x, y'_x = ?$ Пусть cosx=u, тогда y=lnu. Применяя формулу IV, имеем

$$y'_x = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -tgx$$

Ответ: $y'_x = -tgx$

*Пример 4*: $y = \sqrt[3]{\sin^2 4x}$. Полагая sin4x=u, имеем $y = \sqrt[3]{u^2} = u^{2/3}$. Пользуясь формулой 1, получим $y'_x = \frac{2}{3}(\sin 4x)^{-1/3} \cdot (\sin 4x)'$, а производная sin4x найдена в примере 2, тогда $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{\sin 4x}} \cdot 4\cos 4x = \frac{8\cos 4x}{3\sqrt[3]{\sin 4x}}$.

Ответ: $y'_x = \frac{8\cos 4x}{3\sqrt[3]{\sin 4x}}$

*Пример 5*: $y = arctg\sqrt{4x-1}, y'_x = ?$ Пусть $\sqrt{4x-1} = u$, тогда $y = arctgu$, применив формулу XI, получим

$$y'_x=\frac{1}{1+\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{4x-1}\right)'.$$ Производная $\sqrt{4x-1}$ находится по формуле 1, т.е.

$$\left[\left(4x-1\right)^{1/2}\right]'=\frac{1}{2}\left(4x-1\right)^{1/2}\cdot\left(4x-1\right)'=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}.$$

Т.о. $y'_x=\frac{1}{4x}\cdot\frac{2}{\sqrt{4x-1}}=\frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$

Ответ: $y'_x=\frac{1}{2x\sqrt{4x-1}}$

*Пример 6:* $\begin{cases} x=\ln(1-t^4) \\ y=\arccos t^2 \end{cases}$ $y'_x=?$ Находим производные от x и y по параметру t по формулам IV,X соответственно.

$$x'_t=\frac{1}{1-t^4}\cdot(1-t^4)'=\frac{-4t^3}{1-t^4};\quad y'_t=-\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\cdot(t^2)'=-\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Искомая производная от y по x находится как отношение производных от y и x по t (см.6).

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}:\left(-\frac{4t^3}{1-t^4}\right)=\frac{2t(1-t^4)}{\sqrt{1-t^4}\cdot 4t^3}=\frac{\sqrt{1-t^4}}{2t^2};$$

Ответ: $y'_x=\frac{\sqrt{1-t^4}}{2t^2}$.

*Пример 7:* $y^2-\sin 3x=0, y'_x=?$ (см. 5 из основных правил дифференцирования)

Дифференцируем по x обе части равенства, где y есть функция от x, получим $2yy'_x-3\cos 3x=0$. Отсюда найдем $y'_x=\frac{3\cos 3x}{2y}$.

Ответ: $y'_x=\frac{3\cos 3x}{2y}$.

***Общая схема исследования функции и построение её графика***

1. Нахождение области определения, точек разрыва, классификация точек разрыва.
2. Исследование функции на четность, нечетность.
3. Определение точек пересечения графика функции с координатными осями.
4. Определение интервалов монотонности (возрастание и убывание) функции, точек экстремума и экстремального значения функции.
5. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Определение асимптот.
7. Выполнение эскиза графика функции.

*Пример :* Используя общую схему исследования функции, построить график $y=\frac{x^3}{9(x-2)}$.

Согласно обще схеме исследования:

1. Область определения функции. Эта функция является дробно-рациональной, поэтому определена всюду, кроме нулей знаменателя, т.е. x-2=0, x=2. Следовательно, $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$- область определения функции, x=2 – точка разрыва, определим его тип, для этого вычислим пределы слева и справа, т.е. $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{x^3}{9(x-2)}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 2+0}\frac{x^3}{9(x-2)}=+\infty.$

   Таким образом, x=2 – точка разрыва второго рода.

2. Четность, нечетность функции.

$$f(x)=\frac{x^3}{9(x-2)};\ f(-x)=\frac{(-x)^3}{9(-x-2)}=\frac{-x^3}{-9(x+2)}=$$

$$=\frac{x^3}{9(x+2)},\sqrt{2}$$

$$f(-x)\neq f(x);\ f(-x)\neq -f(x);$$

$y=\dfrac{x^3}{9(x+2)}$ - не четная, не нечетная. График несимметричен ни относительно оси ОУ, ни относительно начала координат.

3. Точки пересечения графика функции с координатными осями. С ОХ: $\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{x^3}{9(x-2)}, \dfrac{x^3}{9(x-2)}=0, x=0; \end{cases}$ С ОУ: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, т.е. точка О(0,0)- точка пересечения графика с системой координат.

4. Интервалы монотонности. Экстремум функции.

$$y'_x=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3}{x-2}\right)'=\frac{1}{9}\cdot\frac{3x^2(x-2)-x^3(x-2)'}{(x-2)^2};$$

$y'_x=\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}=0,$ т.е. $x^2(x-3)=0,$ если $x^2=0$ или $x-3=0$; $x_1=0, x_2=3$- критические точки. $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$- интервалы монотонности. На каждом из интервалов определим знак $y'$, придавая любые значения x из указанных $\leftrightarrow$ интервалов.

$B(-\infty,0)$ $x=-1$, $f(-1)=\dfrac{2}{9}\dfrac{(-1)^2(-1-3)}{(-1-2)^2}<0$. Следовательно, $(-\infty,0)$ – интервал убывания функции, далее аналогично. Для удобства оформим в виде таблицы:

| X | y | $y'$ | вывод |
|---|---|---|---|
| $-\infty<x<0$<br>x=0 | $\searrow$<br>0 | -<br>0 | интервал убывания |
| $0<x<2$<br>x=2 | $\searrow$<br>$\infty$ | -<br>$\infty$ | интервал убывания<br>разрыв второго рода |
| $2<x<3$<br>x=3-т. min | $\searrow$<br>3 | <br>0 | интервал убывания<br>$y_{min}=3$ |
| $3<x<+\infty$ | $\nearrow$ | + | интервал возрастания |

5. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Найдем

$$y''_{xx}=\frac{2}{9}\left[\frac{x^3-3x^2}{(x-2)^2}\right]'=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{(3x^2-6x)(x-2)^2-(x^3-3x^2)2(x-2)}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{(x-2)[(3x^2-6x)(x-2)-3x^3+6x^2]}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{3x^3-6x^2-6x^2+12x-2x^3+6x^2}{(x-2)^3}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{x^3-6x^2+12x}{(x-2)^3}=\frac{2}{9}\frac{x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3};$$

т.о. $y''_{xx}=\dfrac{2}{9}\dfrac{x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3}$

Найдем точки перегиба, для чего приравняем к нулю $y''_{xx}$, следовательно, $x(x^2-6x+12)=0$ или x=0 – точка перегиба, причем y// не существует при x=2.

Тогда $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$ - интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, на каждом из них определим знак $y''_{xx}$, например, на (-∞,0) $y''>0$, поэтому (-∞,0) - интервал вогнутости.

В виде таблицы выглядит следующим образом:

| Интервалы | (-∞,0) | 0 | (0,2) | 2 | (2,+∞) |
|---|---|---|---|---|---|
| Знак y// | + | т.перегиба y(0)=0 | - | ∞ | + |
| Поведение y | $\cup$ | | $\cap$ | y не сущ. | $\cup$ |

6. Определение асимптот.

Имеются наклонная, горизонтальная и вертикальная асимптоты. y=kx+b – уравнение наклонной асимптоты, где

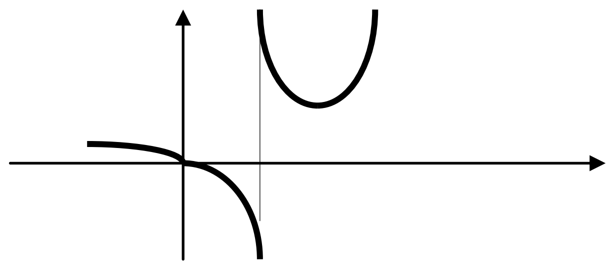
$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$. Определим k ↔ и ↔ b

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{9(x-2)x}=\infty, b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\infty$$

Следовательно, нет наклонной и горизонтальной асимптот. x=2 – точка разрыва, поэтому x=2 – вертикальная асимптота.

7. Построение графика функции.

На систему координат наносим характерные точки по пунктам 1-6 (желательно их нанести параллельно с исследованием).



*Пример:* Найти частные производные функции

1) $z=x^5+x^3y+y^4$;

2) $z=x\ln y+\arcsin y$.

Решение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z'_x=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_y=?$ Считая y постоянной, определим $z'_x$, тогда $z'_x=5x^4+3yx^2$. Аналогично, считая x постоянной, определим $z'_y=x^3+4y^3$.

Ответ: $z'_x=5x^4+3yx^2$; $z'_y=x^3+4y^3$

# Неопределенный и определенный интеграл

1. Основные понятия.

Функция F(x) называется первообразной от функции f(x) на отрезке [a,b], если во всех точках этого отрезка выполняется равенство F(x)=f(x).

Всякая непрерывная функция f(x) имеет бесчисленное множество первообразных, которые отличаются постоянным слагаемым, т.е. все множество первообразных содержится в выражении F(x)+C.

Совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается символом ∫f(x)dx. Итак, ∫f(x)dx= F(x)+C.

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы:

1) Если ∫f(x)dx= F(x)+C, то $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c,$ (1)

где а,в – некоторые постоянные.

2) Подведение под знак дифференциала:

$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du$ (2)

3) Формула интегрирования по частям:

$\int udv = uv-\int vdu.$ (3)

4) Интегрирование рациональных дробей, т.е. отношений двух многочленов, сводится к разложению подинтегральной функции на элементарные дроби в виде:

$\frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+g)^m},$ (4) где k и m – целые положительные числа, а трехчлен $x^2+px+g$ не имеет действительных корней.

5) Интегрирование методом замены переменной состоит в переходе от переменной x к новой переменной t: x=φ(t).

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$ если $F'(x)=f(x)$ и первообразная F(x) непрерывна на отрезке [a,b].

Если промежуток интегрирования не ограничен (например b=∞) или функция f(x) не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при x=b), то по определению полагают $\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx;$ (6)

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx;$ (7)

Интегралы в левых частях равенств (6) и (7) называются несобственными. Несобственный интеграл называется сходящимся, если существует конечный предел в правой части равенств (6) и (7).

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y=f_2(x), y=f_1(x)$ $f_1(x)\le f_2(x)$ и прямыми x=a, x=b, находится по следующей формуле:

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, находится по формуле:

$$V_x=\pi\int_a^b (f_2^2(x)-f_1^2(x))dx$$

Таблица интегралов:

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n\ne -1$
2. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
3. $\int \sin xdx=-\cos x+C$
4. $\int \cos xdx=\sin x+C$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

7. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

13. $\int e^x dx = e^x + C$

14. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

*Примеры:*

1) $\int \cos(1 - 4x)dx = -\frac{1}{4}\sin(1 - 4x) + C$

2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + 5x}} = \int (1 + 5x)^{-1/3} dx = \frac{1}{5} \frac{(1 + 5x)^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{10}\sqrt{(1 + 5x)^2} + C$$

3) $\int xe^{-x^2} dx = \left| xdx = \frac{d(-x^2)}{-2} \right| = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right)' = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot (-x^2)' + 0 = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot (-2x) = xe^{-x^2}$$

4) $\int \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} dx$

Разложим знаменатель на множители: $x^2 + x - 2 = 0; x_1 = 1, x_2 = -2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$.

Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \Rightarrow$$

$$2x + 7 = A(x + 2) + B(x - 1) =$$

$$= (A + B)x + 2A - B \Rightarrow$$

$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A - B = 7 \end{cases} \Rightarrow A = 3; B = -1.$ Следовательно,

$$\int \frac{2x + 7}{x^2 + x - 2} dx =$$

$$= \int \left( \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = 3\ln|x - 1| - \ln|x + 2| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x - 1)^3}{x + 2}\right| + C.$$

5. $\int (5 - x)\ln xdx$. Интегрируем по частям

$$\int (5-x)\ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x, (5-x)dx = dv \\ du = \frac{1}{x}dx; v = \int (5-x)dx - 5x - \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(5x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\ln x - \int \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\ln x -$$

$$-\int \left(5 - \frac{x}{2}\right)dx = \left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\ln x - 5x + \frac{x^2}{4} + C$$

## Ряды.

Задание 1. Исследовать на сходимость числовой ряд с помощью достаточных признаков.

Числовой ряд – сумма вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$, где $u_1, u_2, u_n$ - члены бесконечной последовательности, член называется общим членом ряда.

Суммы $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_2 = u_1 + u_2 + u_3, S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$, составленные из первых членов ряда, называются частичными суммами.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_2, S_n$. Если при бесконечном возрастании номера частичная сумма ряда $S_n$ стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S сумма сходящегося ряда. В противном случае, ряд расходящийся.

Вычисление предела частных сумм не всегда удается провести непосредственно, поэтому сходимость или расходимость ряда определяется с помощью необходимых и достаточных признаков.

Необходимый признак.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член $u_n$ при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится – это достаточный признак расходимости ряда.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. Признак сравнения рядов.

Исследуемый ряд сходится, если его члены не превосходят соответствующих членов другого, заведомо сходящегося ряда; исследуемый ряд расходится, если его члены превосходят соответствующие члены другого заведомо расходящегося ряда.

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используется:

а) геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... (a > 0)$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;

б) гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$, являющийся расходящимся;

в) обобщенный гармонический $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$, сходящийся при $p>1$, расходящийся при $p \leq 1$.

2. Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Признак Даламбера не дает ответа, если $l=1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

3. Признак Коши: Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ при $n\to\infty$ стремится к определенному числу q, то при q<1 ряд с положительными членами $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится, при q>1 расходится.

4. Интегральный признак: Если f(x) – непрерывная убывающая, неотрицательная функция для всех $x\geq 1$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится, то ряд f(1)+ f(2)+…+ f(n)+… сходится, если $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ расходится, то и ряд f(1)+ f(2)+…+ f(n)+… расходится.

Исследовать на сходимость.

Примеры:

$$1).\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n};2).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n};3).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n};4).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

1. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}=\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}+\ldots+\dfrac{1}{\ln n}+\ldots$ Находим $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}=\dfrac{1}{\infty}=0$. Необходимый признак выполняется. Сравним данный ряд с гармоническим рядом: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$

Для всех n≥2 выполняется неравенство $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}\Rightarrow$, ряд расходится, т.к. его члены превосходят соответствующие члены гармонического ряда, являющегося расходящимся.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 2}{3^2}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n!}{3^n}+\ldots$

Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем $u_n=\dfrac{n!}{3^n},u_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{n(n+1)}{3^{n+1}}$,

$\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)n!}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3}=\infty>1$. Следовательно, ряд расходится.

3. Рассматриваемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^4}{27}+\ldots$. Необходимый признак выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n}{3^n}=0$. В нашем примере общий член ряда в n-ой степени, в таких случаях удобно пользоваться признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}}=\lhd$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}l\approx 0{,}9<1,$$

следовательно, ряд сходится.

4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(1+n)\ln^2(n+1)}+\ldots$$

Если общий член ряда довольно простое выражение, то удобно пользоваться интегральным признаком Коши. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}=\frac{1}{\infty}=0.$ Необходимый признак выполняется. Условия признака выполняются: $\frac{1}{2\ln^2 2}>\frac{1}{3\ln^2 3}>\frac{1}{4\ln^2 4}>\ldots>\frac{1}{(1+n)\ln^2(n+1)}$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{a\to\infty}\int_1^{a}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\Bigg|_1^a=\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(a+1)}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

Несобственный интеграл имеет конечное значение, значит он сходится и сходится наш ряд.

Задание. Исследовать на абсолютную, условную сходимость знакопеременный ряд.

Числовой ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа. Числовой ряд называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки.

Признаки сходимости Лейбница: Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и общий член $u_n\to 0$ при $n\to\infty$, то ряд сходится.

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд составленный из абсолютных величин его членов.

Если знакопеременный ряд сходится, а составленный из абсолютных величин его членов расходится, то данный ряд сходится условно.

Задание. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$$

где

$$\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n,\ldots}$ – коэффициенты ряда, а член $a_n x^n$ – общий член ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений x, при которых данный ряд сходится.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, если при $|x|<R$ ряд сходится, и притом абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится.

Радиус сходимости R можно найти, используя признак Даламбера, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$т.е. радиус сходимости равен пределу абсолютной величины отношения коэффициента n-го члена $a_n$ к коэффициенту последующего: $a_{n+1}$. Промежуток $-R<x<R$ называется интервалом сходимости. На концах интервала ряд может сходиться ( абсолютно или условно), но может и расходиться. Сходимость ряда при x=-R, x=R исследуется с помощью какого-либо из признаков сходимости.

Примеры: 1).$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{2^n}(x-3)^n$; 2).$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}x^2$. Дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{2^n}(x-3)^n$. Определим радиус сходимости:

$$a_n=\frac{n+4}{2^n};\ a_{n+1}=\frac{n+5}{2^{n+1}};\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+4)}{n+5}=2.\quad R=2$$

Интервал сходимости определяется неравенством: $|x-3|<2$ $-2<x-3<2$ или $1<x<5$. Исследуем сходимость на концах интервала сходимости. Подставляя значение x=1 в данный ряд получим $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{2^n}(1-3)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2n}(-2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+4)$ - числовой знакочередующийся ряд. Этот ряд расходится, т.к. не выполняется признак Лейбница.

Подставив x=5, получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+4}{2^n}2^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+4)$ также расходящийся, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}(n+4)\neq 0$.

Следовательно, ряд сходится в открытом интервале 1<x<5.

2. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n; a_n=\frac{n+1}{n!}; a_{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)!}-\frac{n+2}{n!(n+1)}$. Определим радиус сходимости:

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n!}\cdot\frac{n!(n+1)}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Следовательно, интервал сходимости ]-∞,+∞[, т.е. данный ряд сходится на всей числовой оси.

Задание. Вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подинтегральной функции в степенной ряд и почленное интегрирование полученного ряда.

Если функция не интегрируется в конечном виде или её интегрирование приводит к громоздким вычислениям, то определенный интеграл от такой функции вычисляется с помощью рядов. В этом случае первообразную функцию сначала выражают в виде ряда, а затем вычисляют определенный интеграл с заданными пределами интегрирования. Число членов полученного ряда определяется заданной точностью вычисления.

Приведем разложения в ряд Маклорена следующих функций.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2-n)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$-1<x\le 1$$

$$(1+x)^m-1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2-\frac{2\cdot 3}{3!}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n+\ldots$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\quad -1\le x\le 1.$$

Пример: Вычислить $\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0,0001.

Заменив в подинтегральном выражении cosx его разложением в степенной ряд, получим

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2!}x-\frac{1}{4!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6!}\frac{x^5}{5}+\ldots\Big|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2!2}-\frac{1}{4!3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!5\cdot 2^5}-\ldots\approx$$

$$\approx 0,25-0,0017+0,000008-\ldots$$

Это знакочередующийся ряд, третий член которого 0,000008<0,0001, поэтому для вычисления данного интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять первых два члена суммы ряда

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx\approx 0,25-0,0017\approx 0,2483.$$

Задание. Вычислить приближенное значение функции, используя её разложение в степенной ряд.

С помощью формул Маклорена находят числовые значения различных функций. Для вычисления приближенного значения функции f(x) в её разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n – конечная величина), а остальные члены отбрасывают.

Пример: Извлечь $\sqrt[3]{1,025}$ с точностью до 0,00001. Имеем $\sqrt[3]{1,025}=(1,0+0,025)^{1/3}$. Рассмотрим биномиальный ряд: $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$

Полагая $x=0,025, m=\frac{1}{3}$ получим

$$(1+0,025)^{1/3}=1+\frac{1}{3}0,025-\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}(0,025)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(0,025)^3=$$

$$=1+0,008333-0,00006+0,000001+\ldots$$

Это знакочередующийся ряд, в котором четвертый член 0,000001<0,00001; следовательно, для приближенного вычисления $\sqrt[3]{1,025}$ с точностью до 0,00001 достаточно взять три первых члена суммы ряда. Итак, $(1+0,025)^{1/3}=\approx 1+0,0833-0,000069\approx 1,00826$.

## Дифференциальные уравнения

Необходимо проработать материал по указанной теме в учебнике Н.С. Пискунова «Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов» (часть 2, глава 13).

При решении дифференциальных уравнений прежде всего надо определить тип уравнения и затем, используя соответствующий метод решения, проинтегрировать его.

I. К простейшим типам дифференциальных уравнений первого порядка относятся: уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные уравнения.

1) Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде $y' = f(x)q(y)$, а также в виде $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy$ (2)

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входили только x, в другую – только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример: Решить уравнение $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$ (3)

Приводим уравнение к виду (2): $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y, \quad xdy = (y^2 - y)dx.$

Делим обе части уравнения на $x(y^2 - y)$: $\dfrac{dy}{y(y-1)} = \dfrac{dx}{x}$.

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{dy}{y(y-1)} = \int\frac{dx}{x}; \quad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln x + \ln C; \quad \frac{y-1}{y} = C_x, y = \frac{1}{1-C_x}$$

При делении на $x(y^2 - y)$ могли быть потеряны решения x=0, y=0 и y=1. Очевидно, y=0 и y=1 – решения уравнения (3), а x=0 – нет.

Мы получили общее решение уравнения (3) $y = \dfrac{1}{1-C_x}$.

Учитывая начальное условие y(1)=0,5, найдем частное решение уравнения $0{,}5 = \dfrac{1}{1-C}$, $0{,}5(1-C) = 1$, $C = -1, y = \dfrac{1}{1+x}$ - частное решение уравнения (3).

2. Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, а также в виде $M(x,y)dx + N(x,y)dy,$ где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - однородные функции одной и той же степени. (Функция $M(x,y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех k>0 имеем $M(kx,ky) = k^n M(x,y)$).

Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену y=ux, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример: Решить уравнение $xdy = (x+y)dx$.

Это уравнение – однородное. Полагаем y=ux. Тогда $dy = udx + xdu$. Подставляя в уравнение, получим: $x(udx + xdu) = (x+ux)dx; \quad x^2du = xdx, \quad xdu = dx.$ Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными $du = \dfrac{dx}{x}, u = \ln|x| + C.$

Возвращаясь к старому переменному y, получим: $y = x(\ln|x| + C)$. Кроме того, имеется решение x=0, которое было потеряно при делении на x.

3. Уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ (1) называется линейным. Существуют два способа решения линейного уравнения:

а) подстановкой $y = u(x)\cdot v(x)$ уравнение приводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными;

б) метод вариации произвольной постоянной, по которому надо сначала решить уравнение $y' + p(x)y = 0$ путем разделения переменных и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную С на неизвестную функцию С(х). Затем выражение, полученное для у, подставляют в уравнение (1) и находят функцию С(х).

II. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Если в уравнение не входит искомая функция у, т.е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т.е. сделав замену $y^{(k)} = p$.

2. Если в уравнение не входит независимое переменное х, т.е. уравнение имеет вид $F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное у, а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

3. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n- кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании получается одно произвольное постоянное, а в окончательном результате – n произвольных постоянных.

Для упрощения расчетов в вариантах контрольной работы рассмотрены дифференциальные уравнения 2-го порядка, понизив порядок которых, мы приходим к дифференциальным уравнениям I- го порядка, решать которые мы уже умеем.

Пример:

1) $y''tgx = y' + 1$. Это уравнение второго порядка вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее у. Положим $y' = p(x), y''p'(x)$, тогда $p'(x)tgx = p(x) + 1$– уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dp}{p+1} = \frac{dx}{tgx}$ интегрируя, получим $\ln|p+1| = \ln|\sin x| + \ln C;\quad p + 1 = C_1 \sin x;\quad p = C_1 \sin x - 1.$

Возвращаясь к замене, имеем $y' = C_1 \sin x - 1$, интегрируя, находим искомое решение: $y = -C_1 \cos x - x + C_2$ - ответ.

2) $y'' = 2y \cdot y'$. Это уравнение второго порядка вида не содержащее х. Положим $y' = p(y), y'' = p'(y) \cdot p(y)$ получаем уравнение первого порядка $p'(y)p(y) = 2yp(y);\quad p'(y)[p'(y) - 2y] = 0$.

а) $p(y) = 0, y'(x) = 0; y = \cos t;$

б) $p'(y) = 2y; \frac{dp}{dy} = 2y;$

$dp = 2ydy$, интегрируя имеем: $p = y^2 + C_1$, возвращаясь к замене, получим $y' = y^2 + C_1; \frac{dy}{y^2 + C_1} = dx, -\frac{1}{\sqrt{C_1}} arctg \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$, в силу произвольности выбора постоянной представим

$$\frac{1}{C_1} arctg \frac{y}{C_1} = x +_2, arctg \frac{y}{C_1} =$$

$$= C_1(x + C_2), \frac{y}{C_1} = tg(C_1 x + C_2),$$

$$y = C_1 tg(C_1 x + C_2)$$

- общее решение уравнения, учитывая: а) у=с.

III. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим однородное линейное уравнение второго порядка.

$y'' + py' + qy = 0$ - где p и q постоянные. Чтобы найти общее решение надо:

1) Составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$. Решить его как квадратное уравнение.
2) Найти общее решение по таблице 1.

Таблица 1.

| Корни характеристического уравнения | Вид общего решения уравнения |
|---|---|
| $k_1 \neq k_2$ - действительные различные числа | $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ |
| $k_1 = k_2$ - действительные равные числа | $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x} = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$ |
| $k_{1,2} = \alpha + \beta i$ - комплексные сопряженные | $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ |

Пример: Найти общее решение уравнения

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$

Решение: Это линейное однородное уравнение второго порядка.

1) Составим характеристическое уравнение (с помощью подстановки Эйлера) $y = e^{kx}$, $k^2 - 4k + 3 = 0$, $k_{1,2} = 2 \pm 1$ $k_1 = 3$, $k_2 = 1$- действительные и разные.
2) Искомое общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$ - ответ.

б) $y'' - 4y' + 5y = 0$

1) Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 5 = 0$, $k_{1,2} = 2 \pm i$ - комплексные сопряженные.

Общее решение имеет вид $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ - ответ.

IV. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$y'' + py' + qy = f(x)$ - линейное неоднородное уравнение.

Общее решение неоднородного уравнения

$y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $y^*$ - частное решение неоднородного уравнения.

1. Общее решение $\bar{y}$ мы умеем находить.
2. Рассмотрим составление $y^*$.

Форма частного решения линейного неоднородного уравнения в зависимости от вида правой части f(x) и корней характеристического уравнения приведена в таблице 2.

Таблица 2.

| Вид правой части | Корни характеристического уравнения | Вид частного решения |
|---|---|---|
| $P_m(x)$ | Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r | $x^r \cdot Q_m(x)$ |
| $P_m(x)e^{\alpha x}$ | Число $\alpha$ является корнем характеристического уравнения кратности r | $x^r \cdot Q_m(x) e^{\alpha x}$ |
| $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x]$ | Число $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r | $x^r[R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x]$ |

Здесь $P_m(x), S_m(x)$ – многочлены от x степени m; $Q_m(x), R_m(x), T_m(x)$ - многочлены от x той же степени, что и $P_m(x), S_m(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты многочленов, надо частное решение подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Пример: Решить уравнение $y'' - y' = x + 1$.

Решение: $y = \overline{y} + y^*$

1. Найдем общее решение $\overline{y}$ однородного уравнения $y'' - y' = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение $k^2 - k = 0, k_1 = 0, k_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения $\overline{y} = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{1 \cdot x} = c_1 + c_2 e^x$, согласно таблице 1(случай 1).
2. Составим частное решение $y^*$, правая часть данного неоднородного линейного уравнения f(x)=x+1 имеет вид $e^{0 \cdot x} \cdot P_1(x)$. Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности r=1 (случай 1 в таблице 2).

Частное решение надо искать в виде $y^* = x(Ax + B)$. Неопределенные коэффициенты A и B необходимо найти. Найдем $y^{*'}$ и $y^{*''}$, $y^{*'} = Ax + B + Ax = 2Ax + B, y^{*''} = 2A$.

Подставив выражение для $y^{*'}$ и $y^{*''}$, в уравнение, получим равенство: 2A-2Ax-B=x+1; -2Ax+2A-B=x+1.

В полученном равенстве приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{array}{l|l} x & -2A = 1 \\ \text{св.члены} & 2A - B = 1 \end{array}$$

Решаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных A и B: $A = -\frac{1}{2}, B = -2;$ $y^* = -\frac{1}{2}x^2 - 2x.$ Запишем решение данного уравнения $y = \overline{y} + \overline{y}^* = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - 2x.$

## Теория вероятностей

*Элементы комбинаторики.*

*Перестановки.* Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число (номер элемента) от 1 до n – число элементов множества. Требуется найти: число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, т.е. число перестановок множества. Пусть множество A имеет n элементов, обозначим число его перестановок через $P_n$.

Справедлива теорема:

$P_n = n!,$ где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$

Задача: сколькими способами можно разместить на полке 4 книги?

Решение: множество состоит из 4 книг (4 элемента), то $P_n=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

Сочетание. Задано некоторое множество A, то можно рассматривать новое множество M(A) – множество всех его подмножеств. Через $M_k(A)$ обозначим множество всех подмножеств A, которые имеют k – элементов (k<n).

Требуется найти: сколько разных k – элементных подмножеств имеет множество из n элементов. Справедлива теорема: $N(M_k(A)) = C_n^k$ и называем число сочетаний из n элементов по k.

Задача: Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 3 человек?

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

*Размещение.* Рассмотрим теперь упорядоченные подмножества данного множества А. Число всех k – элементных подмножеств множества А равно $A_n^k$. Каждое такое подмножество можно упорядочить.

Таким образом, справедлива теорема: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

**Задача:** Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

$$A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = 840.$$

*Понятие случайного события.* Формула классической вероятности. Предметом наблюдения в том или ином случайном опыте может быть некоторый процесс, физическое явление или действующая система. Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта (случайное событие). Событие может произойти и может не произойти в результате эксперимента.

Вероятность осуществления события А определяем по формуле классической вероятности.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(Q)} = \frac{m}{n}, \text{ причем } 0 \le \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \le -1, \quad (1)$$

где N(A) – число всех благоприятствующих событию А исходов (число элементов множества А), N(Q) – n - число всех единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания (число элементов множества Q).

Задача 1. Игральная кость подбрасывается 1 раз. Найти вероятность следующих событий: А(число очков равно 6), В(число очков кратно 3), С(число очков четно), Д(число очков меньше пяти).

Решение: $P(A) = \dfrac{1}{6}$, поскольку m – число благоприятствующих событию А исходов равно 1, т.е. 6 очков при одном бросании игральной кости может появиться один раз, n – число всех исходов эксперимента равно 6: игральная кость имеет 6 граней.

$P(B) = \dfrac{2}{6}$, поскольку m равно 2 (благоприятствующие событию В исходы – это появление 3 или 6 очков), n=6.

$P(C) = \dfrac{3}{6}$, поскольку m равно 3 (благоприятствующие событию С исходы – это появление 2 или 4 или 6 очков), n=6.

$P(Д) = \dfrac{4}{6}$, поскольку m равно 4 (появление очков меньше 5 - это появление 1 или 2, или 3, или 4), n=6.

**Задача 2.** Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников, 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на конференцию. Найти вероятность следующих событий: А (будут выбраны одни третьекурсники), В(все первокурсники попадут на конференцию), С(будет выбран следующий состав: 1 первокурсник, 2 второкурсника, 2 третьекурсника).

Решение: $P(A) = \dfrac{C_1^5}{C_{15}^5}$, где $m = C_7^5$, т.к. требуется выбрать на конференцию 5 человек и все 5 человек должны быть третьекурсники, которых 7 человек.

$n = C_{15}^5$, т.к. кандидатов на конференцию 15 человек. (3+5+7), из них выбираются 5 человек.

$$P(B)=\frac{C_3^3\cdot C_{12}^2}{C_{15}^5},$$ где $m=C_3^3\cdot C_{12}^2$ на конференцию выбираются 5 человек, из которых 3 человека первокурсники, остальные 2 человека могут быть как второкурсники, так и третьекурсники, а их 12 человек.

$$P(C)=\frac{C_3^1\cdot C_5^2\cdot C_7^2}{C_{15}^5}.$$

**Задача 3.** На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в следующем выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятность события А – появление числа 123.

$$P(A)=\frac{1}{A_5^3}.$$

*Повторение испытаний.* Формула Бернулли: Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p (0<p<1), событие поступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности) равна

$$P_n(k)=C_n^5 p^v q^{n\cdot n},\ \text{где}\ q=1-p \qquad (2)$$

Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию А, если оно состоит в не появлении события А. Если P(A)=p, то P($\overline{A}$)=1-p.

*Локальная формула Лапласа.* Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p(0<p<1), событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна

$$P_n'(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{где} \qquad (3)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-x^2/2},\ x=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}$$

Таблицы значений функции приведены в учебниках и задачниках по теории вероятностей (см. например, В.Е. Гмурман «Теория вероятностей»).

*Примечание.* При больших значениях m трудно пользоваться формулой Бернулли, т.к. формула требует выполнение действий над громадными числами. Локальная теорема Лапласа позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

**Задача 4**. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаниях равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в 100 испытаниях.

Решение: Использование формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям, поэтому лучше пользоваться локальной теоремой Лапласа.

$$n=100, k=10, p=0,2; q=0,8;$$

$$y=0; \varphi(0)=0,3989. P_{100}(20)=0,0998.$$

*Теоремы сложения и умножения вероятностей.*

Суммой двух событий А и В называется событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А и В (событие С состоит в выполнении события А или события В, или обоих вместе).

Произведением двух событий А и В называется событие С, состоящее в совместном появлении события А и события В.

Два события называют независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого, в противном случае два события называют зависимыми.

События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Справедливы теоремы:

1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий безразлично каого, равна сумме вероятностей этих событий $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (4)
2. Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий. $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ (5)
3. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий A и B равна $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (6)
4. Вероятность совместного появления двух зависимых событий A и B равна произведению одного из них на деловую вероятность второго $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$ (7)

Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место другое событие A, называется условной вероятностью события B и обозначатся $P_A(B)$.

**Задача 5.** В урне находится 5 белых. 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором – черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A)=\dfrac{5}{12}$ (вычисление P(A) произведено согласно (1)).

Вероятность появления черного шара при втором испытании, вычисленное в предположении, что при первом испытании появится белый шар, т.е. условная вероятность $P_A(B)=\dfrac{4}{11}$. После извлечения белого шара в урне осталось 11 шаров, а было 12 (5+4+3). Среди 11 оставшихся шаров 4 черных. Вероятность появления синего шара при третьем испытании, вычисленная в предположении, что при первом испытании появился белый шар, а при втором – черный $P_{AB}(C)=\dfrac{3}{10}$. Искомая вероятность $P(ABC)=P(A)P_A(B)P_{AB}(C)=\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{11}\cdot\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{22}$.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Понятие случайной величины является одним из основных понятий в теории вероятностей, как и понятия «события» и «вероятность».

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Примеры: 1) число появлений герба при трех бросаниях монеты (возможные значения 0,1,2,3); 2) число отказавших элементов в приборе, состоящем из пяти элементов (возможные значения 0,1,2,3,4,5); 3) число выбитых очков при стрельбе по мишени на каждые 100 выстрелов.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примеры: 1) время безотказной работы лампы, 2) температура помещения, 3) вес зерна пшеницы.

Мы будем обозначать случайные величины прописными буквами X,Y,Z, а их возможные значения соответствующими строчными буквами x,y,z.

Рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (a,b). Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящее в том, что X примет значение меньшее x, т.е. вероятность события X<x обозначим через F(x) и назовем интегральной функцией.

Свойства интегральной функции F(x):

1) $0 \le F(x) \le 1;$
2) $F(x_2) > F(x_1)$, если $x_2 > x_1$
3) Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то F(x)=0, при x ≤ a; F(x)=1, при x ≥ b.

Дифференциальной функцией распределения (плотностью вероятности) f(x) называют первую производную от F(x).

f(x)=F′(x) (8)

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b] называют

$$M(x) = f(x)dx \qquad (9)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата её отклонения. Если возможные значения X принадлежат отрезку [a,b], то

$$Д(x) = x - M(x)^{\,2} f(x)dx \qquad (10)$$

Среднее квадратическое значение непрерывной случайной величины

$$\sigma(x) = \sqrt{Д(x)} \qquad (11)$$

Вероятностный смысл математического ожидания: M(x) приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. Дисперсия является характеристикой рассеивания, разбросанности значений случайной величины около её математического ожидания.

**Задача 6**. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной интегральной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при} & x \le 0 \\ x, \text{при} & 0 < x \le 1 \\ 1, \text{при} & x > 1 \end{cases}$$

Решение. Найдем дифференциальную функцию:

$$f(x) = f'(x) = \begin{cases} 0, \text{при} & x \le 0 \\ 1, \text{при} & 0 < x \le 1 \\ 0, \text{при} & x > 1 \end{cases}$$

Тогда, $M(x) = \int_0^1 x \cdot 1dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$

$$Д(x) = \int_0^1 x^2 \cdot 1dx - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией $f(x) = \frac{4}{\sigma\sqrt{2n}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание; σ - среднее квадратичное отклонение.

Вероятность того, что X примет значение. принадлежащее интервалу (α,β), равна

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (12)$$

После преобразования эта формула примет вид:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (12^*)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$- функция Лапласа, значения которой приводятся в приложениях учебников и задачников по теории вероятности.

## Математическая статистика

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

На практике сплошное обследование применяется сравнительно редко, чаще всего из всей совокупности случайно отбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью или выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов. Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка. Генеральной средней $\overline{X}$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности. Если все значения $x_1, x_2, ..., x_N$ признака генеральной совокупности объема N (число объектов совокупности) различны, то $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$.

Выборочной средней $\overline{X}_в$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если все значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n ( число объектов совокупности) различны, то

$$\overline{X}_b = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (13)$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ..., x_n$ имеют соответствующие частоты $n_1, n_2, ..., n_k$ причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

$$\overline{X}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{n} \qquad (13^*)$$

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. При выборке малого объема точечная оценка может привести к грубым ошибкам, поэтому следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной оценкой называют оценку, которая определяется концами интервала.

Пусть $\theta^*$ служит оценкой неизвестного параметра θ. Положительное число δ характеризует точность оценки. Однако утверждение, что оценка θ удовлетворяет неравенству $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$, не всегда справедливо, поэтому вводится понятие надежности оценки θ по $\theta^*$.

Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ по $\theta^*$ называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$. Пусть вероятность того, что $|\theta - \theta^*| < \delta$ равна γ: $P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma$ или

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma \qquad (14)$$

Соотношение (14) следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр θ равна γ. Интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ называют доверительным.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднем

квадратическом отклонении σ определяется из
$$P\left(\overline{X}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma \qquad (15)$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал
$$\left(\overline{X}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (16)$$

покрывает неизвестный параметр a: точность оценки $\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

**Задача 10.** Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась 1000 часов. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы σ=40 часов.

Решение. Требуется найти доверительный интервал согласно (16). Здесь все известно, кроме t. Из соотношения $2\Phi(t)=\gamma$ (см.(15)) получим 2Ф(t)=0,95; Ф(t)=0,475. По таблице функции Лапласа находим t=1,95. Подставив $t,\overline{X}_B,\sigma,n$ в (16), получим 992,16<a<1007,84.

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. Статистическую зависимость называют корреляционной, если при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой. Например, на каждый из трех одинаковых участков земли внесли по 2 ед. удобрений и сняли соответственно 5,6 и 20 единиц зерна, средний урожай составил 7.

Условным средним $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое значение y, соответствующих значению X=x.

Уравнение $\overline{y}_x$=f(x) называют уравнением регрессии. Пусть требуется по данным корреляционной таблицы отыскать выборочное уравнение прямой линии регрессии. Рассмотрим на примере.

На практике данные наблюдений (что можно считать выборкой из генеральной совокупности, поэтому говорят выборочное уравнение прямой линии регрессии) записывают в виде таблицы, которую называют корреляционной. поясним устройство корреляционной таблицы на примере:

| y\x | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | $n_y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 5 | 7 | - | - | - | - | 12 |
| 25 | - | 20 | 23 | - | - | - | 43 |
| 35 | - | - | 30 | 47 | 2 | - | 79 |
| 45 | - | - | 10 | 11 | 20 | 6 | 47 |
| 55 | - | - | - | 9 | 7 | 3 | 19 |
| $n_x$ | 5 | 27 | 63 | 67 | 29 | 9 | =200 |

В первой строке указаны наблюдаемые значения (10,20,30,40,50,60) признака X, а в первом столбце – наблюдаемые значения (15,25,35,45,55) признака У. На пересечении строк и столбцов указаны частоты $n_{x,y}$ наблюдаемых пар значений признаков.

Например, пара (30,25) наблюдалась 23 раза. В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, значение 15 признака У наблюдалось 12 раз в сочетании с значениями X равными 10 и 20. Аналогично, в последней строке, записаны суммы частот столбцов.

Уравнение выборочной прямой регрессии У на X имеет вид:
$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X}), \qquad (17)$$

где $\overline{X}, \overline{Y}$ - выборочные средние; $\sigma_x, \sigma_y$ - выборочные средние квадратические отклонения; $r_x$ - выборочный коэффициент корреляции.

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по данным таблицы:

$$r_B = \frac{\sum \mathrm{n}_{\mathrm{uv}} uv - n\overline{u}\overline{v}}{\mathrm{n}\sigma_u \sigma_v} \qquad (18)$$

Перейдем к условным вариантам: $u = \dfrac{x - C_1}{n_1} = \dfrac{x-40}{10}$ (в качестве ложного нуля $C_1$ взята варианта x=40, имеющая наибольшую частоту; шаг $n_1$ равен разности между двумя соседними вариантами (20-10=10)), $v = \dfrac{y - C_2}{n_2} = \dfrac{y-35}{10}$ (в качестве ложного нуля $C_2$ взята варианта y=35, имеющая наибольшую частоту; шаг $n_2$ равен разности между двумя соседними вариантами (25-15=10)).

Составим корреляционную таблицу в вариантах, что упростит вычисления.

| v\u | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | $n_v$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 5 | 7 | - | - | - | - | 12 |
| -1 | 0 | 20 | 23 | - | - | - | 43 |
| 0 | - | - | 30 | 47 | 2 | - | 79 |
| 1 | - | - | 10 | 11 | 20 | 6 | 47 |
| 2 | - | - | - | 9 | 7 | 3 | 19 |
| $n_u$ | 5 | 27 | 63 | 67 | 29 | 9 | n=200 |

Найдем

$$\overline{u} = \frac{\sum un_u}{n} = \frac{5\cdot(-3) + 27\cdot(-2) + 63\cdot(-1) + 29\cdot 1 + 9\cdot 2}{200} =$$
$$= -0,425$$

$$\overline{v} = \frac{\sum vn_v}{n} = \frac{12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2}{200} = -0,09$$

Вычислим $\overline{u}^2 = \dfrac{\sum u^2 n_u}{n} = \dfrac{5\cdot 9 + 27\cdot 4 + 63\cdot 1 + 29\cdot 1 + 2\cdot 4}{200} = 1,405$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u}^2 - (\overline{u})^2} = \sqrt{1,405 - 0,425} = 1,100$$

Аналогично, $\sigma_v$=1,209.

Найдем $\sum n_{u\vartheta} u\vartheta$ методом четырех полей. Название метода связано с тем, что строка и столбец, пересекающиеся в клетке, содержащей наибольшую частоту, делят корреляционную таблицу на 4 части, которые называются полями.

| | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 1 | II |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 5 | 7 | - | | - | - | 58 | |
| -1 | - | 20 | 23 | | - | - | 63 | |
| 0 | | | | | | | III | IV |
| 1 | - | - | 10 | | 20 | 6 | -10 | 32 |
| 2 | - | - | - | | 7 | 3 | 0 | 26 |
| 1 | 30 | 68 | 23 | II | - | - | 121 | - |
| III | - | - | -10 | IV | 34 | 24 | -10 | 58 |

Рассмотрим первое поле

| | -3 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|
| -2 | 5 | 7 | - |
| -1 | - | 20 | 23 |

Таким образом, в каждой клетке оказывается записанным и произведение uv и частота, остается их перемножить и результаты сложить. Аналогично выполняются и остальные поля. Тогда, $\sum n_{uv} uv = 169$. Найдем искомый коэффициент корреляции:

$$r_B = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}n}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{169 - 200(0,425)0,09}{200\cdot 1,106\cdot 1,209} = 0,603$$

Найдем: $\overline{x} = \overline{u} n_1 + C_1 = -0,425 \cdot 10 + 40 = 35,75;$

$\overline{y} = \overline{v} n_2 + C_2 = 0,09 \cdot 10 + 35 = 35,9;$

$\sigma_x = \sigma_u n_1 = 1,106 \cdot 10 = 11,06;$

$\sigma_y = \sigma_v n_2 = 1,209 \cdot 10 = 12,09.$

Подставив $r_B, \overline{x}, \overline{y}, \sigma_x, \sigma_y$ в (17), получим искомое уравнение

$y_x = 35,9 - 0,603 \dfrac{12,09}{11,06}(x - 35,75)$ или $y_x = 0,659x + 12,34.$