ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ГОУ ВПО «ВСГТУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ ТИПОВОГО РАСЧЕТА ПО ТЕМЕ
« ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Составители:
Рыгзынова М.В.
Елтошкина Е.В.

Улан-Удэ

Издательство ВСГТУ
2008

Методические указания предназначены для обучения студентов дневного обучения практическим умениям по высшей математике. По разделам предмета даются краткие теоретические сведения и полный разбор заданий, ориентированные на решение типовых расчетных и контрольных работ по разделу «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

Задание 1:: Написать разложение вектора $\vec{x} = \{3,7,-7\}$ по линейно независимым векторам
$\vec{a} = \{2,1,0\}, \vec{b} = \{1,-1,2\}, \vec{c} = \{2,2,-1\}$.

Решение: Разложить вектор $\vec{x}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – это значит представить вектор $\vec{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, т.е. $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, где *m,n,p* – некоторые числа. Подставляя в данное равенство координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}$, получим

$\{3,7,-7\} = m\{2,1,0\} + n\{1,-1,2\} + p\{2,2,-1\}$, т.е.

$$\begin{cases} 3 = 2m + n + 2p, \\ 7 = m - n + 2p, \\ 7 = 0m + 2n - p. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $m = 2, n = -3, p = 1$.

Следовательно, $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

Задание 2: Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ *и* $\vec{c}_2 = -\vec{a} + \vec{b}$, построенные по векторам $\vec{a} = (1;-2;4)$ и $\vec{b} = (7;3;5)$.

Решение:

Коллинеарными называются векторы, расположенные на одной прямой или параллельных прямых.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов заключается в равенстве нулю их векторного произведения.

$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Отсюда следует, что $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

Поскольку векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координаты которых известны, то мы можем записать координаты векторов $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ как линейные комбинации соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ Примем следующее обозначение:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{c}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\vec{c}_1 = \{x_1, y_1, z_1\} = \{2a_x + 3b_x, 2a_y + 3b_y, 2a_z + 3b_z\}$$

$$\vec{c}_2 = (x_2, y_2, z_2) = \{-a_x + b_x, -a_y + b_y, -a_z + b_z\}$$

$$\overrightarrow{c_1} = \{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3, 2 \cdot 0, +3 \cdot 1, 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4\} = \{11, 3, 16\}$$

$$\vec{c}_2 = \{-1 + 3, 0 + 1, -2 + 4\} = \{2, 1, 2\}$$

Подставим координаты векторов $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ в формулу для вычисления векторного произведения $[\vec{c}_1, \vec{c}_2]$

$$[\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 11 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k};$$

$$[\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \sqrt{100 + 100 + 25} - \sqrt{225} = 15.$$

Векторное произведение $[\vec{c}_1, \vec{c}_2] \neq 0$, следовательно, векторы $\vec{c}_1$ *и* $\vec{c}_2$ не коллинеарны.

Ответ: векторы не коллинеарны.

Задание 4: Даны координаты вершин пирамиды *A(3,1,3), B(-3,4,0), C (3,3,4), D(2,2,-2)*. Найти:

а) $\angle ABC$;

б) площадь грани *ABC*;

в) объем пирамиды;

г) длину высоты пирамиды, проведенной из точки *A*;

д) уравнение этой высоты;

е) записать уравнение прямой, проходящей через точку *D* параллельно прямой *AC;*

ж) составить уравнение плоскости, проходящей через точку *A* перпендикулярно прямой *BD*.

Решение:

а) Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - начало вектора, а $M_2(x_2, y_2, z_2)$ его конец, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны разности соответствующих координат конца M_2 и начала M_1, т.е.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \qquad \textbf{(1)}$$

модуль вектора

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Угол между ребрами BA и BC обозначим через φ и вычислим cosφ по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \qquad \textbf{(3)}$$

Координаты векторов $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ находим по формуле (1):

$\overline{BA}(6,-3,3)$, $\overline{BC}(6,-1,4)$. Полученные координаты подставим в формулу (3):

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot 6 + (-3)\cdot(-1) + 3\cdot 4}{\sqrt{36+9+9}\sqrt{36+1+16}} = \frac{51}{\sqrt{54}\sqrt{53}} = \frac{51}{3\sqrt{318}} \approx 0,95$$

Ответ: $\angle ABC = \arccos 0,95$

б) Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|. \qquad \textbf{(4)}$$

Координаты векторов известны $\overline{BA}(6,-3,3)$, $\overline{BC}(6,-1,4)$.

Найдем векторное произведение векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$:

$$\left[\overline{BA},\overline{BC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 3\\ 6 & -1 & 4\end{vmatrix}=-9\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k};$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overline{BA},\overline{BC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2+(-6)^2+12^2}=\frac{1}{2}\sqrt{81+36+144}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{261}\approx 25{,}4.$$

<u>Ответ:</u> Площадь грани ABC равна 25,4 кв.ед.

в) Зная, что смешанное произведение векторов $\left(\vec{a},\vec{c}\,,\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ есть число, абсолютная величина которого выражает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{c},\vec{b}$, а пирамида $ABCD$ составляет 1/6 часть этого параллелепипеда, можем написать

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\overline{BA}\,\overline{BC}\,\overline{BD} \qquad \textbf{(5)}$$

А смешанное произведение трех векторов $\overline{BA}(6,-3,3),\overline{BC}(6,-1,4),\overline{BD}(5,-2,-2)$, заданных своими координатами, равно определителю третьего порядка, составленному из этих координат. Таким образом,

$$\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}, \qquad \textbf{(6)}$$

$$\left[\overline{BA},\overline{BC},\overline{BD}\right]=\begin{vmatrix}6 & -3 & 3\\ 6 & -1 & 4\\ 5 & -2 & -2\end{vmatrix}=12-60-36+15+48-36=-57,$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|-57\right|=\frac{57}{6}\approx 9{,}5$$

<u>Ответ:</u> Объем пирамиды равен 9,5 куб.ед.

г) Длину высоты *AO* вычислим, как расстояние от точки до плоскости, по формуле

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \textbf{(7)}$$

где (x_0, y_0, z_0) - координаты точки, от которой находим расстояние до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Поэтому найдем уравнение плоскости *BCD,* как уравнение плоскости, проходящей через три точки по формуле:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Подставив координаты точек *B,C,D* , получим

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 3+3 & 3-4 & 4-0 \\ 2+3 & 2-4 & -2-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z \\ 6 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 8(x+3) + 32(y-4) +$$

$$+ 7z = 8x + 32y + 7z - 104 = 0$$

(BCD):8x+32y+7z-104=0, т.*A(3,1,3)*, тогда

$$|AO| = \frac{|8 \cdot 3 + 32 \cdot 1 + 7 \cdot 3 - 104|}{\sqrt{8^2 + 32^2 + 7^2}} \approx \frac{|-27|}{33{,}72} \approx 0{,}8$$

Ответ: длина высоты равна 0,8 ед.

д) Вспомним, что если плоскость задана уравнениями вида $Ax + By + Cz + D = 0$, то коэффициенты *A,B,C* можно рассматривать как координаты нормального вектора плоскости, т.е. вектора, перпендикулярного к плоскости.

Уравнение плоскости *BCD*: *8x+32y+7z-104=0.* Нормальный вектор плоскости $\vec{N}(8{,}32{,}7)$. Напишем искомое уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1, y_1, z_1)$, в направлении вектора $\vec{N}(m, n, p)$.

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \qquad \textbf{(9)}$$

Подставив координаты в формулу (6), получим

$$\frac{x-3}{8}=\frac{y-1}{32}=\frac{z-3}{7}.$$

<u>Ответ:</u> Уравнение высоты AO: $\frac{x-3}{8}=\frac{y-1}{32}=\frac{z-3}{7}$.

ж) Рассмотрим вектор $\overline{AC}$ как направляющий вектор для искомой прямой. Вектор $\overline{AC}$ имеет координаты (0, 2, -5), т.D(2,2,-2), тогда уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно прямой AC запишется по формуле (9)

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-5}$$

<u>Ответ:</u> уравнение прямой $\frac{x-2}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-5}$

з) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку (x_0, y_0, z_0) и данный вектор (A, B,C) перпендикулярный плоскости, имеет вид

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+D\cdot(z-z_0)=0. \qquad \textbf{(10)}$$

Точка $A(3,1,3)$ дана, найдем вектор $\overline{BD}$: $\overline{BD(5,-2,-2)}$, тогда уравнение плоскости будет

$$5\cdot(x-3)+(-2)\cdot(y-1)+(-2)\cdot(z-3)=0$$

$$5x-2y-2z-7=0$$

<u>Ответ:</u> *5x-2y-2z-7=0* – уравнение плоскости

<u>Задание 5:</u> Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0 \end{cases}$

Решение:

Найдем направляющий вектор $\bar{s}(l,m,n)$ прямой. Поскольку он должен быть перпендикулярен нормальным векторам заданных плоскостей $\overline{N_1}(1,-2,3)$ и $\overline{N_2}(2,3,-4)$, в качестве его можно взять векторное произведение векторов $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$:

$$\bar{s} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k}$$

Таким образом, $l = -1, m = 10, n = 7$.

За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит искомая прямая, можно принять любую точку, координаты которой удовлетворяют общим уравнениям плоскостей. Полагая $x_0 = 0$, из системы уравнений

$$\begin{cases} 0 - 2y_0 + 3z_0 + 15 = 0, \\ 2 \cdot 0 + 3y_0 - 4z_0 - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2y_0 - 3z_0 = 15, \\ 3y_0 - 4z_0 = 12 \end{cases}$$

получаем $y_0 = -24$, $z_0 = -21$. Итак, искомые канонические уравнения прямой по формуле (9) имеют вид

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+24}{10} = \frac{z+21}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+24}{10} = \dfrac{z+21}{7}.$

Задание 6: Линия задана в полярной системе координат $r = \dfrac{6}{\sqrt{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi}}$.

а) Записать ее уравнение в декартовых координатах;

б) построить эту линию.

Решение:

а) Формулы, связывающие декартовые координаты x и y точки M и ее полярные координаты r и φ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

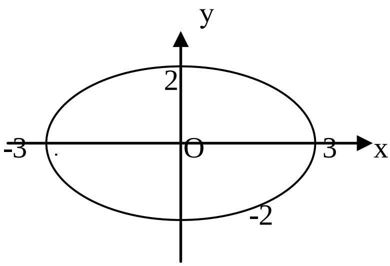
$$r = \frac{6}{\sqrt{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi}}, \Rightarrow r\cdot\sqrt{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi} = 6, \Rightarrow$$

$$r^2(4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi) = 36, \Rightarrow 4r^2\cos^2\varphi + 9r^2\sin^2\varphi = 36, \Rightarrow$$

$$4(r\cos\varphi)^2 + 9(r\sin\varphi)^2 = 36, \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36,$$

разделим полученное выражение на 36: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ - это уравнение эллипса.

б)



<u>Задание 7:</u> Дано общее уравнение кривой второго порядка $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$

а) Преобразовать уравнение к каноническому виду;

б) построить кривую.

<u>Решение:</u>

Сгруппируем члены, содержащие x и члены, содержащие y. Выделим полный квадрат суммы или разности.

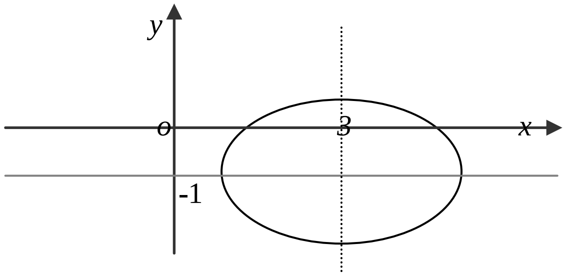
$$(2x^2 - 12x) + (5y^2 + 10y) + 13 = 0;$$

$$2(x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 9 - 9) + 5(y^2 + 2y + 1 - 1) + 13 = 0;$$

$$2(x-3)^2 - 18 + 5(y+1)^2 - 5 + 13 = 0;$$

$$2(x-3)^2 + 5(y+1)^2 = 10; \qquad \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1\,.$$

Получили каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{2}$, оси координат перемещены по оси x на 3 единицы вправо, по оси y на –1. Строим график.



Задание 8: Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек *A(1,-2)* и *B(-1,2)* есть величина постоянная, равная 20.

Решение: Возьмем произвольную точку *M(x,y)*, принадлежащую геометрическому месту точек. Тогда расстояние от т. *M(x,y)* до т. *A(1,-2)* равно

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-(-2))^2},$$

аналогично $\left|\overline{BM}\right| = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-2)^2}$. По условию выполняется равенство $\left|\overline{AM}\right|^2 + \left|\overline{BM}\right|^2 = 20$. Подставив в него значения $\left|\overline{AM}\right|$ и $\left|\overline{BM}\right|$, получим

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (x+1)^2 + (y-2)^2 = 20,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 20,$$

$$2x^2 + 2y^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Итак, искомое геометрическое место точек – это есть окружность с центром в точке (0,0) и радиусом $\sqrt{5}$.

Ответ: окружность $x^2 + y^2 = 5$.

Задание 9: Найти точку, симметричную точке *M(-3,1,-9)* относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0.$

Решение: Пусть искомая точка *N (x, y)*. Тогда прямая *MN* проходит перпендикулярно к плоскости, а значит нормальный вектор плоскости $\overline{N}(4,-3,-1)$ параллелен прямой *MN*. Следовательно, по формуле (9) уравнение прямой *MN* имеет вид $\frac{x-(-3)}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-(-1)}{-1}$. Введем параметр t и запишем уравнение прямой в параметрическом виде

$$\frac{x-(-3)}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-(-9)}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 4t, \\ y-1 = -3t, \\ z+9 = -1t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4t-3, \\ y = -3t+1, \\ z = -t-9 \end{cases}$$

Теперь можно найти точку пересечения *O* прямой с плоскостью, подставив полученные равенства в уравнение плоскости $4\cdot(4t-3) - 3\cdot(-3t+1) - (-t-9) - 7 = 0, \ \Rightarrow t = 0{,}5$, тогда т.*O* $(4\cdot 0{,}5 - 3; -3\cdot 0{,}5 + 1; -0{,}5 - 9) = (-1; -0{,}5; -9{,}5)$. Точка *O* является серединой отрезка *MN*, поэтому т. *O* $(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}; \frac{z_M + z_N}{2})$. Следовательно, $\frac{-3 + x_N}{2} = -1; \frac{1 + y_N}{2} = -0{,}5; \frac{-9 + z_N}{2} = -9{,}5$. Итак, решая эти уравнения , находим $x = 1; y = -2; z = -10$.

Ответ: точка $N(1;-2;-10)$

Литература

1.Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике: Учеб. Пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1999.

3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Наука, 1998.

4. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука.

6.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для студентов втузов. В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1986.

7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высшая школа.

8.. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука.

9. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука.

10. Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике: Учеб. Пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1999.

11. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре.

Подписано в печать 18.05.2008г.   Формат 60x84 1/16
Усл. п. л.   0,96.   Тираж 70 экз. заказ №

Издательство ВСГТУ: 670013 г.Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40, в